数理解析研究所講究録
第 1546 巻 2007 年 157-162

關孝和「括要算法　巻元」朶積術

竹之内　脩

1　括要算法「巻元」

括要算法「巻元」は、

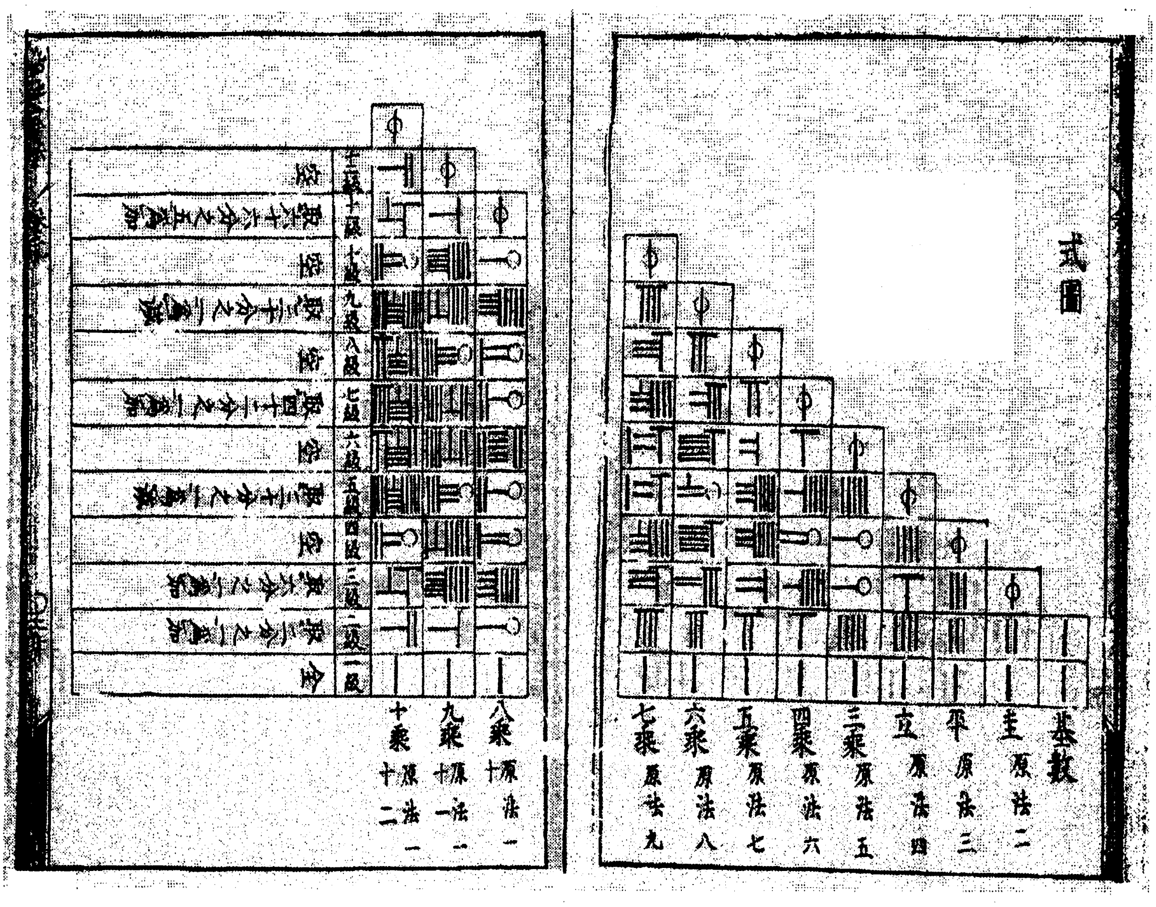
　　朶積総術　　朶積術解

から成っている。

このうち、朶積総術では、累裁招差之法として、基礎の数値 (限数) の多項式の値として与えられたデータ (元積) から、その多項式を求める補間法の手法が論ぜられる。そして、朶積術解においては、自然数の累乗和

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

を n の多項式として表示する公式が与えられる。



この式図の各数を求める方法は、

　圭朶演段、平方朶演段、立方朶演段、三乗方朶演段、四乗方朶演段、五乗方朶演段

として、詳細に述べられている。

ここでは、三乗方朶演段について、述べられていることを見ておこう。

三乗方朶演段　基数を 5 乗して、そこで 1 を消した式を作る。二級数 5 の $\frac{1}{2}$ を取り、三級数 10 の $\frac{1}{6}$ を取り、四級取数 は 0、これらの和に一級数 1 を加え、得た数 $\frac{31}{6}$ を三乗方朶原法 5 から引く。余りを五級数 5 で割って $-\frac{1}{30}$ を得る。これが五級取数である

2　累裁招差之法

これは、多くの部分から成っている。簡単な総論のあと、「解術」として、

設元積第一、招差数第二、定加減第三、齊差率第四

が述べられ、次に、「求元積本術」

一次相乗之法、二次相乗之法、三次相乗之法、四次相乗之法已上、

一次相乗演段、二次相乗演段、三次相乗演段

が与えられる。

基礎の数値を限数、与えられたデータを元積という、そして、次々の演段で、定積、平積$_{\text{實}}$、平積$_{\text{法}}$、平積、…、…　そして一差を得る。

その一差から、また、定積を作り、立積$_{\text{實}}$、立積$_{\text{法}}$、立積、…、…　そして一差を得る。

これを三乗積、四乗積としていって、できなくなるまで続ける。そして、最終結果として、一番簡単な一回ですんでいるところでは、

本術、平差を置きて、限数を以って之に乗じ、定差を加えて、

又限数を以って之に乗じ、元積を得るなり。

としている。

具体的に数値例があげられているのは、次のものである。

一次相乗演段

限数	7	11
元積	637	957

限数	5	7	16	20
元積	15	28	136	210

二次相乗演段

限数	10	20	30	40	50
元積	48,841,000	92,576,000	131,019,000	163,984,000	191,285,000

限数	3	8	11
元積	14	204	506

三次相乗演段

限数	5	11	16	18
元積	571,000	44,374	183,424	345,024

これらについて、多くのページを割いて具体的に計算をあげている。

この計算は、

限数を x_1, x_2, $\cdots$

元積を y_1, y_2, $\cdots$

とするとき、

・もし、z が $z = a + bx$ と x の 1 次式になつている場合には、

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 \\ y_2 &= a + bx_2 \end{aligned}$$

から、

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = b$$

となり、これが平差である。

・またもし、z が $yz = a + bx + cx^2$ と x の 2 次式になつている場合には、

$$\begin{aligned} y_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 \\ y_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 \\ y_3 &= a + bx_3 + cx_3^2 \end{aligned}$$

から、

$$\begin{aligned} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= b + c(x_2 + x_1) \\ \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} &= b + c(x_3 + x_2) \end{aligned}$$

したがって、

$$\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \div \Big((x_3 + x_2) - (x_2 + x_1)\Big) = c$$

となり、これが立差である。

3 自然数の累乗和

次に、自然数の累乗和

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

を求める。

この朶積術解は、次の部分から成っている。

方朶

圭朶演段、平方朶演段、立方朶演段、三乗方朶演段、四乗方朶演段、五乗方朶演段

式図、衰朶

ここで問題なのは、演段が、五乗方朶演段までしか与えられていないことである。

従来とられている解釈では、これらの演段は、累裁招差之法によって得たものであろう、ということである。それで、それを実際やってみると、これは随分手間のかかる仕事であることがわかる。

4　式図

關は、五乗方朶までこの累裁招差之法によって計算したのであろう。そして、次の結果を得た。

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{30}$	0		
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	0	
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{42}$	0

ここで、この係数を横に足したものは 1 になる。

いま、左端の $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ を外に出して括った形にすると、次のようになる。

$\frac{1}{2}$	1	1	0					
$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
$\frac{1}{4}$	1	2	1	0	0			
$\frac{1}{5}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	0		
$\frac{1}{6}$	1	3	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	
$\frac{1}{7}$	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	0

さらに、ここで縦に $\frac{1}{2}$ 等を繰り出すと、次のようになる。

		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	
$\frac{1}{2}$	1	2	0					
$\frac{1}{3}$	1	3	3	0				
$\frac{1}{4}$	1	4	6	0	0			
$\frac{1}{5}$	1	5	10	0	1	0		
$\frac{1}{6}$	1	6	15	0	3	0	0	
$\frac{1}{7}$	1	7	21	0	7	0	1	0

この結果を見て、關は二項係数の表と関連づけることを思い至ったのであろう。あるいはある程度その関連について予測していたのかも知れない。あるいは、もっと好意的にみれば、四乗方朶ぐらいまで累裁招差法の方式で計算したあと、係数を並べてみて以下の演段に思いつき、それで五乗方朶の場合をやってみて、間違いないという確信を得て、式図を十乗方朶まで作り上げたのであろう。

いま、この稿のはじめに述べた三乗方朶演段について、述べられていることを見よう。なお、三乗方朶というのは、4 乗の和

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$$

のことである。

基数というのは、$x+1$ のことである。これを 5 乗して 1 を消した式を作るというのは、二項定理展開で、

$$x^5 + 5\,x^4 + 10\,x^3 + 10\,x^2 + 5\,x$$

を作ることである。(定数項は 0) そして、

二級数 (x^4 の係数) 5 の $\frac{1}{2}$

三級数 (x^3 の係数) 10 の $\frac{1}{6}$

四級数 (x^3 の係数) は 0

これらの和に

一級数 (x^5 の係数) 1 を加え、得た数 $\frac{31}{6}$ これを原法 5 から引いて、余り $-\frac{1}{6}$

これを二項係数の五級数 5 で割って $-\frac{1}{30}$ これが、三乗方朶の五級の位置に入るべき数 (五級取数) である。